

Nombres premiers

I) Définition

Un nombre **premier** est un nombre entier positif qui admet exactement **deux diviseurs** : 1 et lui-même.

Remarques :

- **0 n'est pas un nombre premier** : Il possède une infinité de diviseurs (1 ; 2 ; 3 ; 4 ...)
- **1 n'est pas un nombre premier** : il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

Exemples :

3 est un nombre premier. Ses seuls diviseurs sont 1 et 3

5 est un nombre premier. Ses seuls diviseurs sont 1 et 5.

4 n'est pas un nombre premier : ses diviseurs sont 1 ; 2 et 4

II) Cribles d'Eratosthène

Il existe une infinité de nombres premiers.

Le crible d'Eratosthène est un algorithme qui permet de trouver les nombres premiers selon une technique bien précise :

- On barre le chiffre 1 puisqu'il n'est pas premier.
- 2 n'est pas barré, on l'entoure et on barre tous les multiples de 2 (sauf 2)
- 3 n'est pas barré, on l'entoure et on barre tous les multiples de 3 (sauf 3)
- Le nombre suivant non barré est 5. On l'entoure et on barre tous ses multiples (sauf 5) et on continue ainsi de suite

Remarques : On obtient la liste de tous les nombres premiers (les nombres qui ne sont pas barrés (voir le tableau ci-dessous avec les nombres inférieurs ou égaux à 100) :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 et 97

Cette liste n'est pas à apprendre par cœur il suffit juste de savoir retrouver les nombres premiers.

III) Décomposition d'un nombre entier en produits de facteurs premiers

1) Définition

Décomposer un nombre entier en produits de facteurs premiers revient à écrire ce nombre entier sous la forme de **produits de nombres premiers**.

Pour cela il faut bien connaître le début de la liste des nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 19.

2) Exemples et méthode :

Exemple 1 : Décomposer 60 en produit de facteurs premiers

- Nous devons tester si 60 est **divisible par 2**
(premier nombre premier),
Oui c'est bien le cas puisque son chiffre des unités est 0
 $60 \div 2 = 30$

60	2
30	
- On teste si 30 est **divisible par 2**.
Oui c'est bien le cas puisque son chiffre des unités est 0.
 $30 \div 2 = 15$

60	2
30	2
15	
- On teste si 15 est **divisible par 2**
Non ce n'est pas le cas alors on teste s'il est **divisible par le nombre premier suivant** qui est 3.
Oui c'est le cas et $15 \div 3 = 5$

60	2
30	2
15	3
5	
- On teste si 5 est **divisible par 3** .
Non ce n'est pas le cas alors on teste s'il est **divisible par le nombre premier suivant** qui est 5.
Oui c'est le cas et $5 \div 5 = 1$

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Dès que l'on arrive à un quotient égal à 1, on a terminé.

La décomposition en produits de facteurs premiers est : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Exemple 2 : Décomposer 132 en produit de facteurs premiers

- On teste si 132 est **divisible par 2**
(premier nombre premier),
Oui c'est bien le cas puisque son chiffre des unités est 2
 $132 \div 2 = 66$

132	2
66	
- On teste si 66 est **divisible par 2**.
Oui c'est bien le cas puisque son chiffre des unités est 6.
 $66 \div 2 = 33$

132	2
66	2
33	
- On teste si 33 est **divisible par 2**
Non ce n'est pas le cas alors on teste

s'il est **divisible par le nombre premier suivant** qui est **3**.

Oui c'est le cas et $33 \div 3 = 11$

33 **3**
11

• On teste si 11 est **divisible par 3** .

Non ce n'est pas le cas alors on teste

s'il est **divisible par le nombre premier**

suivant qui est **7, il n'est pas divisible par 7, le nombre premier suivant est 11** .

Oui il est divisible par 11 et $11 \div 11 = 1$

132 | **2**
66 | **2**
33 | **3**
11 | **11**
1 |

Dès que l'on arrive à un quotient égal à 1, on a terminé.

La décomposition en produits de facteurs premiers est : $132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11$

Remarque : La décomposition en produit de facteurs premiers est utile pour simplifier des fractions, lorsqu'on les multiplie ainsi que pour trouver un dénominateur commun lors des comparaisons de fractions, lorsqu'on les additionne ou les soustrait.