Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Coordonnées du milieu d'un segment. Norme d'un vecteur

I) Repère orthonormé et base orthonormée

Définition

• **On définit le repère orthonormé dont l'origine est le point O, le triplet (O ; I, J) tel que :**

(OI) ⊥ (OJ) et

OI= OJ = 1 unité

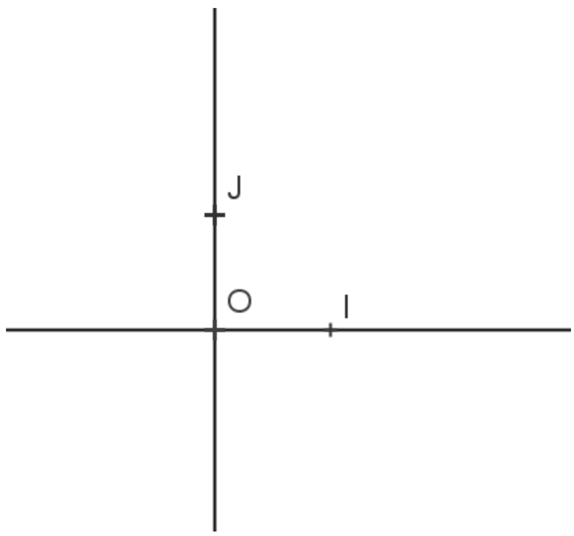
O est appelé origine du repère.

La droite (OI) est l'axe des abscisses du repère (O ; I, J).

La droite (OJ) est l'axe des ordonnées du repère (O ; I, J).

Les points I et J définissent sur chacun des axes une graduation.

• **Si on note :** $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ **et** $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$
Ce repère peut aussi se noter (O ; $\vec{i}$ **,** $\vec{j}$ **).**
On dit que ($\vec{i}$ **,** $\vec{j}$ **) est une base orthonormée.**

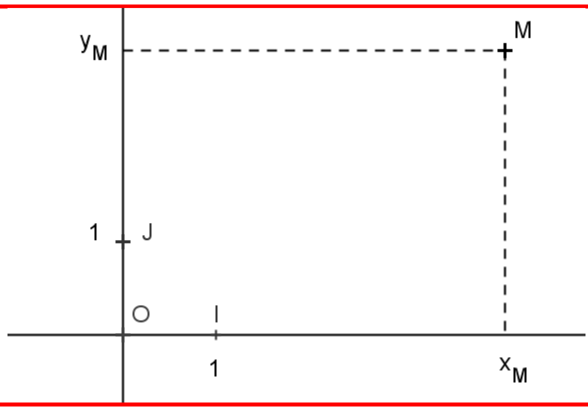


II) Coordonnées d'un point dans un repère orthonormé

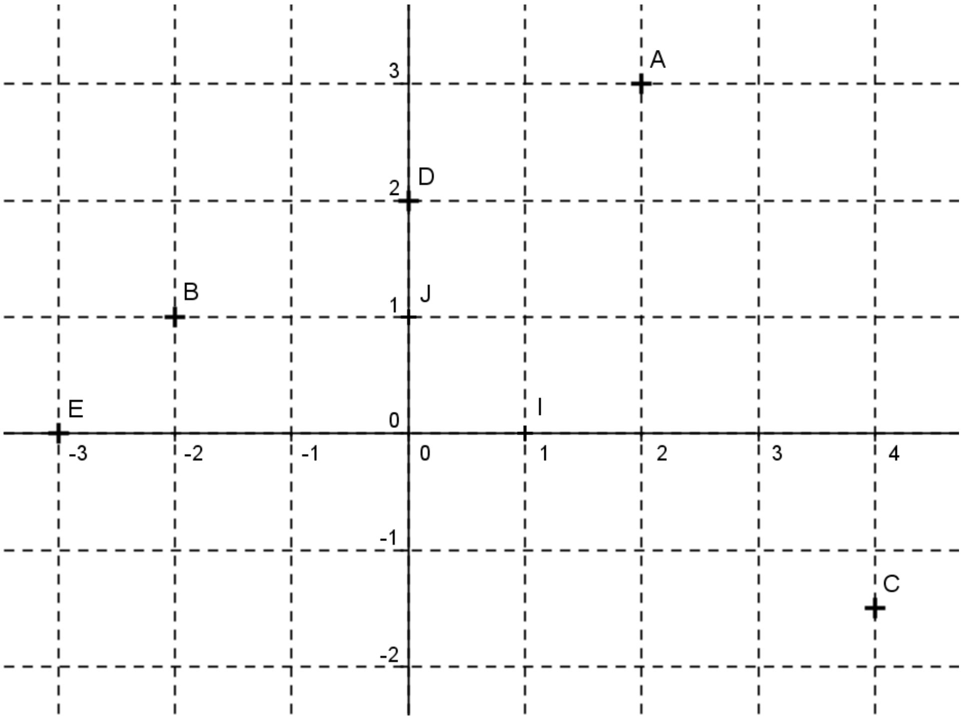
1) Définition

Dans un repère orthonormé, tout point M est repéré par un unique couple $(x_M ; y_M)$ **de nombre réels appelé couple de coordonnées de M**

x_M **est l'abscisse du point M et**
y_M **est l'ordonnée de M**



2) Exemple



Sur la figure ci dessus les points A, B, C, D et E ont pour coordonnées :

A : x_A = 2 et y_A = 3 ; 2 est l'abscisse de A et 3 est l'ordonnée de A

on écrit A(2 ; 3)

B : x_B = −2 et y_B = 1 ; −2 est l'abscisse de B et 1 est l'ordonnée de B
on écrit B (− 2 ; 1)

C : x_C = 4 et y_C = −1,5 : 4 est l'abscisse de C et −1,5 est l'ordonnée de C
on écrit C(4 ; −1,5)

D : x_D = 0 et y_D = 2 ; 0 est l'abscisse de D et 2 est l'ordonnée de D
on écrit D(0 ; 2)

E : x_E = −3 et y_E = 0 ; −3 est l'abscisse de E et 0 est l'ordonnée de E
on écrit E(− 3 ; 0)

de même :

le point I a: 1 pour abscisse et 0 pour ordonnée I (1 ; 0)

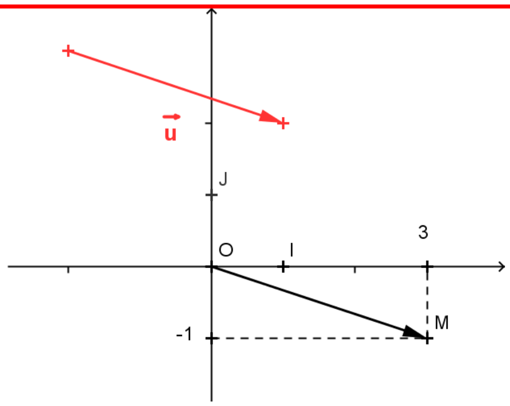
le point J a: 0 pour abscisse et 1 pour ordonnée J (0 ; 1)

le point O a: 0 pour abscisse et 0 pour ordonnée O (0 ; 0)

III) Coordonnées d'un vecteur

1) Définition

$(O\,;\,I\,,J)$ **est un repère du plan et** $\vec{u}$ **est un vecteur donné. La translation de vecteur** $\vec{u}$ **associe au point O un unique point M. On sait que** $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

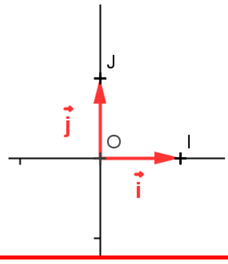


Dans un repère $(O\,;\,I\,,J)$**, les coordonnées d'un vecteur** $\vec{u}$ **sont les coordonnées du point M tel que** $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

Ci-contre le vecteur $\vec{u}$ **a pour coordonnées** $(3\,;\,-1)$

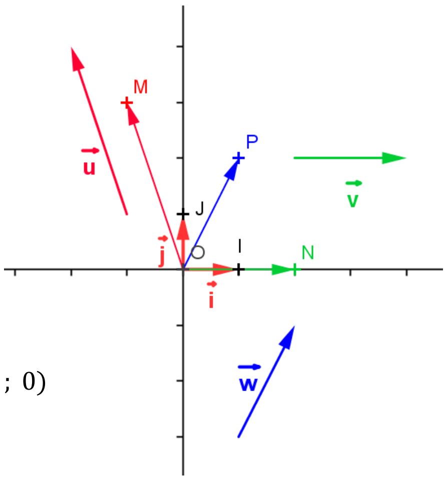
Autre notation d'un repère :

Bien souvent au lieu de noter $(O\,;\,I\,,J)$ **un repère, on le note** $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ **avec** $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ **et** $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$



Exemple

Sur la figure ci-contre les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont associés respectivement aux points M, N et P
donc $\vec{u}$ (−1 ; 3), $\vec{v}$ (2 ; 0) et $\vec{w}$ (1 ; 2)



Remarque : Le vecteur nul a pour coordonnées $(0\,;\,0)$

2) Propriété

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.
C'est à dire, dans un repère les vecteurs $\vec{u}$ $(x\,;\,y)$ **et** $\vec{v}$ $(x\,;\,y')$ **sont égaux si, et seulement si,** $x = x'$ **et** $y = y'$

Démonstration :

La translation de vecteur $\vec{u}$ associe au point O, le point M.

La translation de vecteur $\vec{v}$ associe au point O, le point N.

On a $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, les points M et N sont confondus donc si, et seulement si, M et N ont les mêmes coordonnées.

IV) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

1) Propriété

Dans un repère, on considère les points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$

Démonstration

Dans un repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) , on note M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ donc $ABMO$ et un parallélogramme, les segment $[OB]$ et $[AM]$ ont le même milieu K.

On a donc :

$x_K = \frac{x_B}{2}$ et $y_K = \frac{y_B}{2}$ mais on a aussi

$x_K = \frac{x_A + x_M}{2}$ et $y_K = \frac{y_A + y_M}{2}$

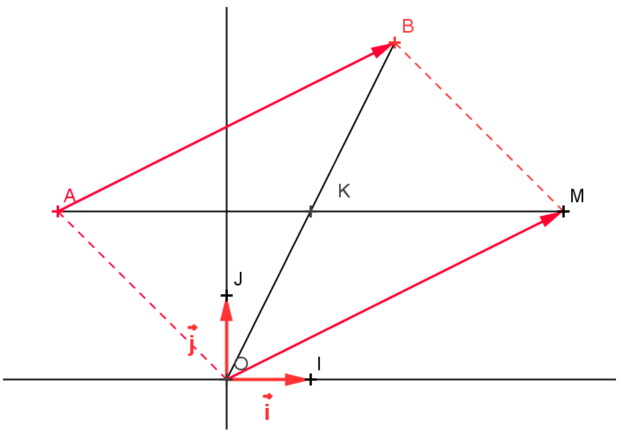
On en déduit :

$x_M = 2\,x_K - x_A = 2\,\frac{x_B}{2} - x_A = x_B - x_A$

$y_M = 2\,y_K - y_A = 2\,\frac{y_B}{2} - y_A = y_B - y_A$

Or les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les coordonnées du point M c'est à dire

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$



Exemple

Si dans un repère, on donne les points $A(2\,;\,-3)$, $B(1\,;\,5)$, $C\,(1\,;\,4)$ et $D\,(0\,;\,-2)$

On a alors :

$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$ donc $\overrightarrow{AB}\,(1 - 2\,;\,5 - (-3))$ d'où $\overrightarrow{AB}\,(-1\,;\,8)$

$\overrightarrow{DC}\,(x_C - x_D\,;\,y_C - y_D)$ donc $\overrightarrow{DC}$ (1 – 0 ; 4 – (– 2)) d'où $\overrightarrow{DC}\,(1\,;\,6)$

$\overrightarrow{AC}\,(x_C - x_A\,;\,y_C - y_A)$ donc $\overrightarrow{AC}$ (1 – 2 ; 4 – (– 3)) d'où $\overrightarrow{AC}\,(-1\,;\,7)$

V) Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère orthonormé on considère les points A $(x_A ; y_A)$ et

B $(x_B ; y_B)$

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $(x_I ; y_I)$ avec :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemples :

1) Dans un repère orthonormé, on considère les points A (3 ; 5) et B (3 ; − 2) soit J le milieu de [AB]

Alors $x_J = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+3}{2} = x_A = x_B = \mathbf{3}$ et $y_J = \frac{y_A + xy_B}{2} = \frac{5 + (-2)}{2} = \frac{3}{2}$

2) Dans un repère orthonormé on considère les points A (1 ; − 2) et B (4 ; 4) soit I le milieu de [AB]

Alors $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$

VI) Norme d'un vecteur

1) Calcul de la distance AB

Dans un repère orthonormé on considère les points $A(x_A ; y_A)$ $B(x_B ; y_B)$.

La distance entre les points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple :

Dans un repère orthonormé on donne A (− 2 ; 3) et B (1 ; 5)

$AB = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

Démonstration :

On suppose comme sur la figure ci-contre que $x_B \geq x_A$ et $y_B \geq y_A$

Soit C le point tel que $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$

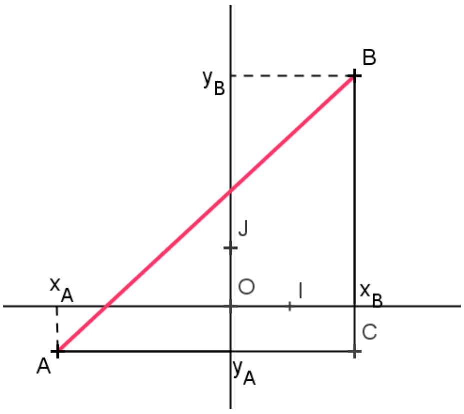
Le triangle ABC est rectangle en C
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC on peut écrire :
$AB^2 = AC^2 + BC^2$
Comme $AC = x_C - x_A = x_B - x_A$

et $BC = y_B - y_C = y_B - y_A$

on a : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

et comme AB est positif

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)2 + (y_B - y_A)2}$



2 Norme d'un vecteur

Dans un repère orthonormé on considère les points $A(x_A\,;\,y_A)$, $B(x_B\,;\,y_B)$ et $\vec{u}\,(x\,;\,y)$.

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\|\overrightarrow{AB}\|$ et, est égale à la distance AB :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

La norme du vecteur $\vec{u}$ se note $\|\vec{u}\|$ et est égale à :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemple 1 : Dans un repère orthonormé Les coordonnées des points A et B sont A (– 2 ; 3) et B (1 ; 5). La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Exemple 2 : Dans un repère orthonormé les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\vec{u}$ (4 ; 3).
La norme du vecteur $\vec{u}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\|\vec{u}\| = 5$$