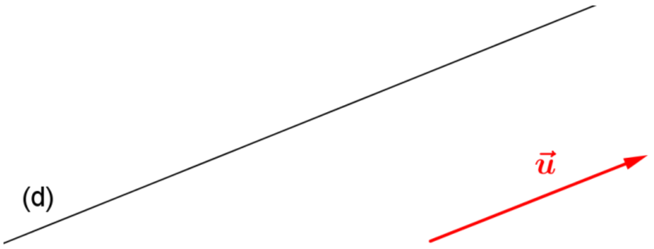
Equations cartésiennes d'une droite

I) Vecteur directeur d'une droite :

1) Définition

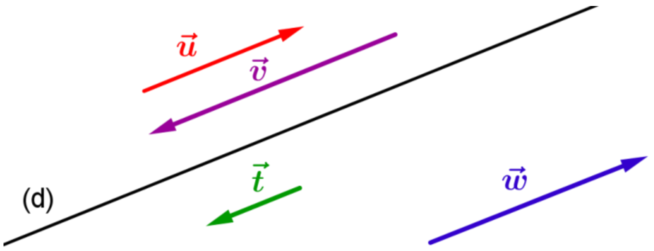
Soit (d) une droite du plan.

Un vecteur directeur d'une droite (d) est un vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (d).



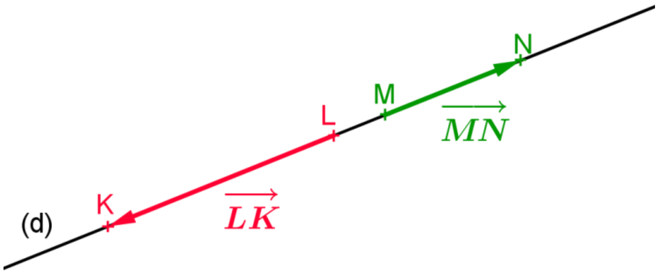
Exemple 1 :

Toute droite possède une infinité de vecteurs directeurs.



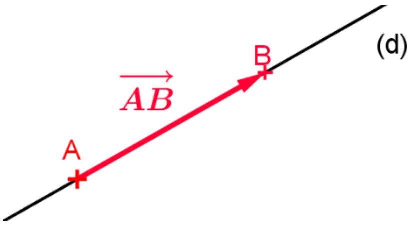
Remarque : Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite (d).Tout vecteur non nul et colinéaire au vecteur $\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de cette droite.

Exemple 2 :

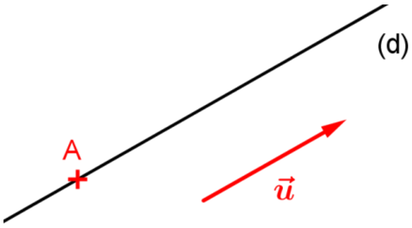


Remarques :

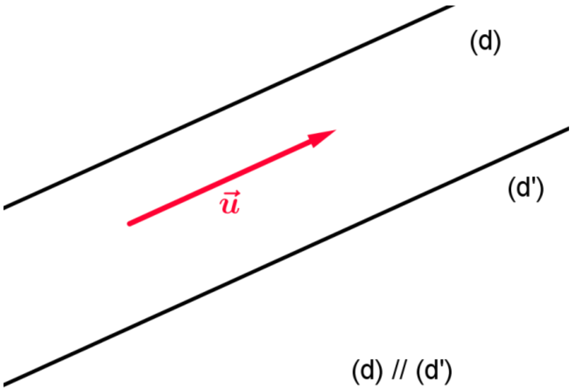
• Deux points distincts quelconques de la droite (d) définissent un vecteur directeur de cette droite.



• La donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ non nul définissent une unique droite (d).



• Deux droites (d) et (d') sont parallèles si tout vecteur directeur de l'une est aussi vecteur directeur de l'autre.



II) Equations cartésiennes d'une droite

1) Propriété

Toute droite (d) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$

avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$. Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}$ ($-b$; a)

Remarque : Une droite (d) admet une infinité d'équations cartésiennes
En effet, si $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ est une équation cartésienne de (d), alors pour tout réel $\boldsymbol{k}$ non nul, $\boldsymbol{kax + kby + kc = 0}$ est une autre équation de la même droite.

2) Propriété réciproque

L'ensemble des points M $(x ; y)$ vérifiant l'équation : $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$($-b$; a)

Démonstration :

Soit (d) une droite, A(x_A , y_A) un point de (d) et $\vec{u}\,(p ; q)$ un vecteur directeur de (d).

Soit M $(x ; y)$ un point du plan.

« M appartient à (d) » équivaut à :

« $\overrightarrow{AM}$ $(x - \boldsymbol{x_A} ; \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_A})$ et $\vec{u}\,(p ; q)$ sont colinéaires », qui équivaut à :

Déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ égal à 0 :

« $\boldsymbol{q}\,(x - \boldsymbol{x_A}) - \boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_A}) = 0$ qui équivaut à :

$\boldsymbol{q}\,x - \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{y} - \boldsymbol{q}\,(\boldsymbol{x_A} - \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{y_A}) = 0$

Posons $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{q}$; $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{x_A} - \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{y_A})$.

Cette dernière équation s' écrit $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ et $\vec{u}$, vecteur directeur de (d), a pour coordonnées $(-\boldsymbol{b} ; \boldsymbol{a})$.

Si $\boldsymbol{a} = 0$, alors $\boldsymbol{b} \neq 0$, $ax + by + c = 0$ équivaut à : $y = -\dfrac{c}{b}$. Attention l'ensemble des points M cherché, est donc une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Si $\boldsymbol{b} = 0$, alors $\boldsymbol{a} \neq 0$, $ax + by + c = 0$ équivaut à : $x = -\dfrac{c}{a}$. Attention l'ensemble des points M cherché, est donc une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

3) Exemples

Méthode 1 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite, connaissant un point et un vecteur directeur

Explication à partir d'un exemple : Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère du plan
Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point A(1 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (-1; 3).

Réponse : Soit M un point de d de coordonnées : M (x ; y)

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ ($x-1$; $y+1$) et $\vec{u}$ (**-1; 3**) sont colinéaires si, et seulement si,

$(x-1)(3) - (y+1)(-1) = 0$ équivaut à :

$3x - 3 + y + 1 = 0$ équivaut à :

$\mathbf{3x + y - 2 = 0}$ **Une équation cartésienne de la droite d est :** $\mathbf{3x + y - 2 = 0}$

Méthode 2 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite connaissant deux points distincts de la droite

Explication à partir d'un exemple : Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère du plan.
Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points A (5 ; 13) et B (10; 23).

Réponse : Les points A et B appartiennent à la droite d donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.

$\overrightarrow{AB}$ (10 – 5 ; 23 – 13), soit $\overrightarrow{AB}$ (5 ; 10) en divisant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 5, nous obtenons le vecteur $\vec{u}$.(1 ; 2) vecteur directeur aussi de la droite d.

Donc b = 1 et a = -2

Une équation cartésienne de la droite d est donc de la forme : $-\mathbf{2}x + y + c = 0$

Comme le point A (**5** ; **13**) appartient à la droite d, ses coordonnées vérifient l'équation :

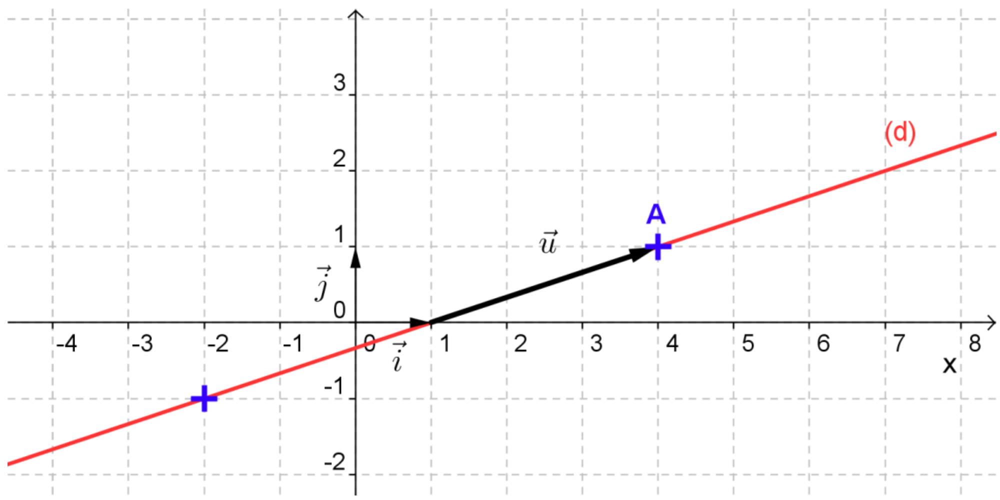
$-2 \times \mathbf{5} + \mathbf{13} + c = 0$ $-10 + 13 + c = 0$

D'où : **c = – 3**

Une équation cartésienne de la droite d est donc : $\mathbf{-2x + y - 3 = 0}$

Méthode 3 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir de sa représentation graphique

Explication à partir d'un exemple : Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d, tracée ci-dessous



Réponse :

Méthode 1 : Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d)
On lit graphiquement $\vec{u}$ (3 ; 1) Donc a = -1 et b = 3

Une équation cartésienne de la droite d est de la forme :

$-x + 3y + c = 0$ Comme le point A (4 ; 1) appartient à la droite (d), ses coordonnées vérifient l'équation :

$-4 + 3 + c = 0 \qquad c = 1$

Une équation cartésienne de la droite d est : $\boldsymbol{-x + 3y + 1 = 0}$

Méthode 2 : On prend deux points de la droite, par exemple : A (4 ; 1) et B (-2 ; -1) et on applique la même méthode qu'à l'exemple 2.

4) Equation réduite d'une droite

Soit (d) une droite du plan.

• Si (d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un unique couple de réels (m, p) tel que l'équation $y = mx + p$ soit une équation de (d) qui peut aussi s'écrire sous la forme : $mx - y + p = 0$

• Si (d) est parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un unique réel c tel que l'équation $x = c$ soit une équation de (d).

Remarque : Soit (d) une droite **non parallèle à l'axe des ordonnées.**

Son équation réduite peut donc s'écrire sous la forme: $y = mx + p$ **.**

● Nous avons vu dans les classes précédentes, que le nombre $\boldsymbol{m}$ **est le coefficient directeur de la droite (d).**

L'équation réduite peut aussi s'écrire sous la forme $\boldsymbol{m}x - y + p = 0$. Un vecteur directeur de cette droite est donc (1 ; $\boldsymbol{m}$)

● Cette droite (d) est la représentation graphique de la fonction affine :
$f(x) = mx + p$.

Exemple:

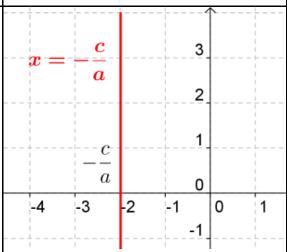
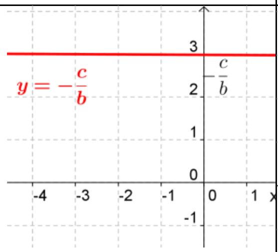
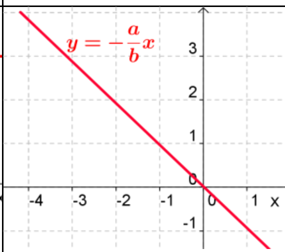
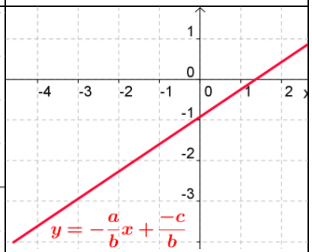
Soit (d) la droite d'équation cartésienne: $4x + 2y + 3 = 0$

● **Son équation réduite est de la forme:** $\boldsymbol{y = -2x - \frac{3}{4}}$

• Un vecteur directeur de cette droite est (1 ; **-2**)

• Cette droite est la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = -2x - \frac{3}{4}$.

III) Récapitulatif : Equations cartésiennes et équations réduites

	Cas où $b = 0$ et $a \neq 0$	Cas où $a = 0$ et $b \neq 0$	Cas où $c = 0$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$	Cas où $c \neq 0$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$
Equation cartésienne	$ax + 0 + c = 0$ $ax + c = 0$	$0 + by + c = 0$ $by + c = 0$	$ax + by + 0 = 0$ $ax + by = 0$	$ax + by + c = 0$
Equation réduite	$x = -\frac{c}{a}$	$y = -\frac{c}{b}$	$y = -\frac{a}{b}x$	$y = -\frac{a}{b}x + -\frac{c}{b}$
Représentation graphique				

IV) Positions relatives de deux droites

1) Propriété

Deux droites (d) et (d'), d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si : $a\,b' - a'b = 0$

2) Démonstration :

Soit d la droite d'équation : $ax + by + c = 0$ et d' la droite d'équation $a'x + b'y + c' = 0$
$\vec{u}\,(-\boldsymbol{b}\ ;\ \boldsymbol{a})$. est un vecteur de directeur de d et $\vec{u}'\,(-\boldsymbol{b}'\ ;\ \boldsymbol{a}')$. est un vecteur de directeur de d' .
d et d' sont parallèles équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires
ce qui équivaut à : $-\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}\ (-\boldsymbol{b}') = 0$
ce qui équivaut à : $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}' - \boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = 0$**.**

3) Exemples

Exemple 1 : Dans un repère du plan (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$),
la droite d_1 a pour équation : $2x + y - 3 = 0$ et d_2 a pour équation : -4 $x - 2y + 5 = 0$.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Réponse :

$\overrightarrow{u_1}\,(-\mathbf{1}\ ;\ 2)$.et $\overrightarrow{u_2}\,(\mathbf{2}\ ;\ -4)$ sont deux vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2.

On calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$:

$-\mathbf{1} \times (-4) - 2 \times \mathbf{2} = 4 - 4 = 0$

Les droites d_1 et d_2 sont donc parallèles.

Exemple 2 : Dans un repère du plan (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$),
la droite d_1 a pour équation : $3x + 2y - 3 = 0$ et d_2 a pour équation : - $x + 2y + 5 = 0$.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Réponse :

$\overrightarrow{u_1}\,(-\mathbf{2}\ ;\ 3)$.et $\overrightarrow{u_2}\,(-\mathbf{2}\ ;\ -1)$ sont deux vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2.

$-\mathbf{2} \times (-1) - (-2) \times \mathbf{3} = 2 + 6 = 8 \neq 0$

Les droites d_1 et d_2 ne sont donc pas parallèles.

Remarque:

Soit la droite (d) d'équation : $y = mx + p$ et (d') : $y' = m'x + p'$
(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $m = m'$

En effet les vecteurs de coordonnées (1 ; m) et (1 ;m') sont deux vecteurs directeurs respectifs de (d) et (d').
D'où : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires si et seulement si $m = m'$

V) Système de deux équations à deux inconnues

1) Système de deux équations à deux inconnues

Définition 1 :

Un système de deux équations à deux inconnues est de la forme :
$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ **où a , b , c, a' , b' et c' sont des nombres relatifs ,**
les deux nombres inconnues sont désignés par les lettres x et y

Exemple :

$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = -1 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues. Les nombres x et y sont les inconnues.

Définition 2 :

a , b , c, a' , b' , c' sont des nombres relatifs.
Résoudre un système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
revient à trouver tous les couples de nombres (x ; y) qui sont à la fois solutions des deux équations

Exemple 1 :

Le couple (8 ; -2) est-il une solution du système d'équations suivant : $\begin{cases} 2x + 5y = 6 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$

Si $x = 8$ et $y = -2$ alors :

$2 \times 8 + 5 \times (-2) = 16 - 10 = 6$

donc le couple (8 ; -2) vérifie la **première équation**

$5 \times 8 - 3 \times (-2) = 40 + 6 = 46$ et $46 \neq 2$

donc le couple (8 ; -2) ne vérifie pas la **deuxième équation**

Donc le couple (8 ; -2) n'est pas solution de ce système

Exemple 2 :

Le couple (9 ; 2) est-il une solution du système d'équations suivant ?

$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$

si $x = 9$ et $y = 2$ alors :

$2 \times 9 - 3 \times 2 = 18 - 6 = 12$ donc le couple de nombres (9 ; 2) vérifie la première équation

$9 + 2 \times 2 = 9 + 4 = 13$ donc le couple de nombres (9 ; 2) vérifie la deuxième équation

Le couple (9 ; 2) est bien solution de ce système

2) Méthode de résolution

a) Résolution par combinaison

Résoudre par la méthode de combinaison le système $\begin{cases} \mathbf{4}x + 3y = 2 \\ \mathbf{6}x + 7y = 13 \end{cases}$

• On repère les coefficients devant une des deux inconnues, par exemple ceux de x, et on détermine un de leurs multiples communs non nuls :

12 est un multiple commun de 4 et 6

• On rend égaux les coefficients devant l'inconnue choisie :

(dans notre cas, on rend égaux les coefficients devant x)

Pour avoir 12 comme coefficient devant les termes en x

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 & \textit{On multiplie par 3 cette ligne} \\ 6x + 7y = 13. & \textit{On multiplie par 2 cette ligne} \end{cases}$$

On obtient : $\begin{cases} \mathbf{12}x + 9y = 6 \\ \mathbf{12}x + 14y = 26 \end{cases}$

• On soustrait les égalités membre à membre et on résout l'équation obtenue :

$(12x - 12x) + (9y - 14y) = 6 - 26$

$0 - 5y = -20$

$-5y = -20$

$y = -20 \div -5 = 4$

$\boldsymbol{y = 4}$

• On détermine la valeur de l'autre inconnue en remplaçant la valeur trouvée dans une des deux équations :

En remplaçant $y = 4$ dans la première équation obtient :

$4x + 3 \times 4 = 2$ ce qui donne : $4x + 12 = 2$

$4x = 2 - 12$

$4x = -10$

Soit $x = -\frac{10}{4}$

$\boldsymbol{x = -2,5}$

Le couple (- 2,5 ; 4) est solution du système

• On vérifie si le couple trouvé est une solution du système de départ

$4 \times (-2{,}5) + 3 \times 4 = -10 + 12 = 2$ et

$6 \times (-2{,}5) + 7 \times 4 = -15 + 28 = 13$

• Conclusion :

Le système possède une unique solution le couple de nombres : (-2,5 ; 4)

b) Résolution par substitution du système

Résoudre par la méthode de substitution le système : $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

• On exprime une des inconnues en fonction de l'autre

On choisit l'équation et l'inconnue afin d'avoir les calculs les plus simples.

Dans ce système, le plus simple et d'exprimer $\boldsymbol{y}$ **en fonction de** $\boldsymbol{x}$ de la première équation : $3x + y = 1$ et on obtient :

$\boldsymbol{y = 1 - 3x}$

• On remplace cette inconnue par sa nouvelle expression dans l'autre équation:

On remplace y par l'expression $1 - 3x$ dans la deuxième équation :

$2x + 3(1 - 3x) = -4$

$2x + 3 - 9x = -4$

$-7x + 3 = -4$

$-7x = -4 - 3 = -7$

$-7x = -7$

$x = \frac{-7}{-7} = 1$ donc

$\boldsymbol{x = 1}$

• On détermine la valeur de l'autre inconnue

On sait que $\boldsymbol{y = 1 - 3x}$ **.** Il suffit de remplacer x par 1 dans cette expression

On obtient : $\boldsymbol{y = 1 - 3 = -2}$

$\boldsymbol{y = -2}$

• On vérifie si le couple trouvé est bien solution du système

$3 \times 1 + (-2) = 3 - 2 = 1$ et

$2 \times 1 + 3 \times (-2) = 2 - 6 = -4$

• Conclusion :

Le couple (1 ; - 2) est solution de ce système

3) Méthode graphique :

Soit le système : $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

a) On exprime y en fonction de x dans les deux équations

on obtient un nouveau système qui a les mêmes solutions que le système de départ :

$6x - 3y = 9$ On a donc : $-3y = 9 - 6x$ soit $y = \frac{-6}{-3}x + \frac{9}{-3}$ on obtient donc : $y = 2x - 3$

$2x + y = 5$ On a donc $y = -2x + 5$. On obtient le système :

$$\begin{cases} y = 2x - 3 & (1) \\ y = -2x + 5 & (2) \end{cases}$$

b) Dans un repère, on représente graphiquement les fonctions affines associées au système

• La représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto 2x - 3$ est une droite d'équation $y = 2x - 3$ (qui est l'équation (1) du système).On notera cette droite (d1)

Si $\boldsymbol{x = 1}$ alors $y = 2 - 3 = \boldsymbol{-1}$ et si $\boldsymbol{x = 0}$ alors $\boldsymbol{y = -3}$

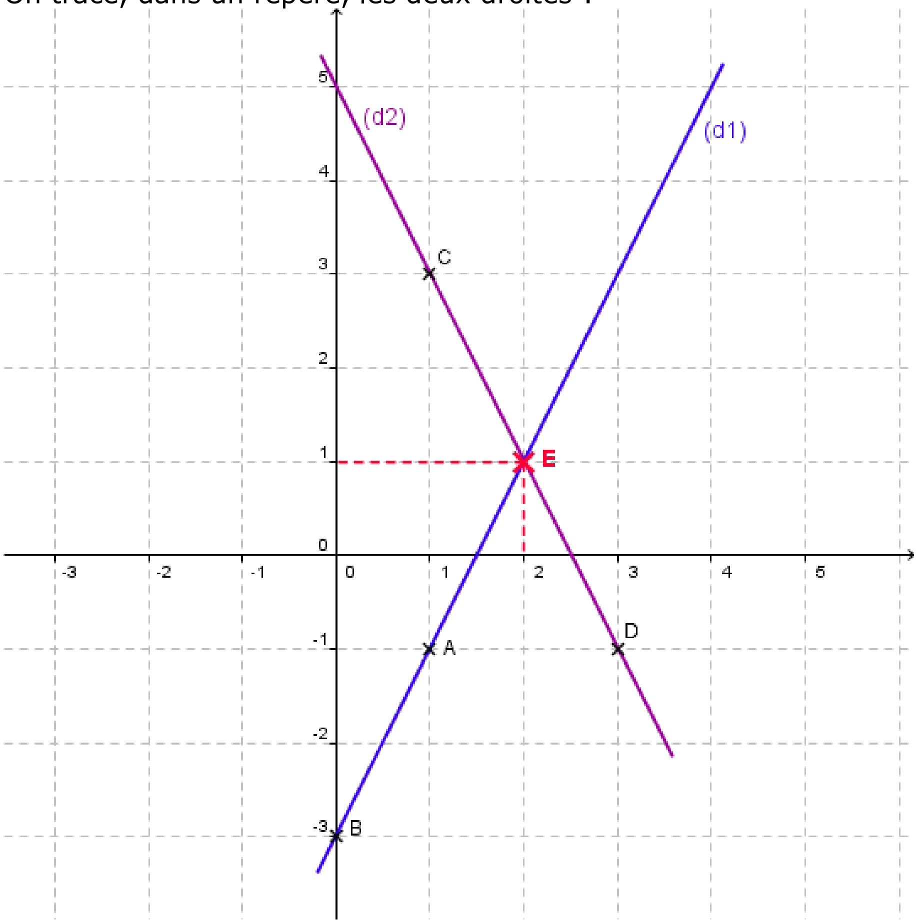
La droite (d1) passe par les points **A (1 ; -1)** et **B (0 ; -3)**

• La représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto -2x + 5$ est une droite d'équation $y = -2x + 5$ (qui est l'équation (2) du système).On notera cette droite (d2)

Si $\boldsymbol{x = 1}$ alors $y = -2 + 5 = \boldsymbol{3}$ et si $\boldsymbol{x = 3}$ alors $\boldsymbol{y} = -2 \times 3 + 5 = -6 + 5 \boldsymbol{= -1}$

La droite (d2) passe par les points **C (1 ; 3)** et **B (3 ; -1)**

On trace, dans un repère, les deux droites :



c) On lit les coordonnées du point d'intersection des droites (d1) et (d2)

Les coordonnées du point d'intersection E des deux droites sont : (2 ; 1)

Le couple (2 ; 1) est solution de ce système

d) On vérifie si le couple trouvé est bien solution du système

$6 \times 2 - 3 \times 1 = 12 - 3 = 9$ et

$2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$

Le couple (2 ; 1) est bien solution du système : $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Remarque :

Une lecture graphique conduit souvent à une solution approchée du système (coordonnées non entière, imprécision des tracés etc..).

Il faut donc toujours vérifier les résultats de la lecture graphique par le calcul.