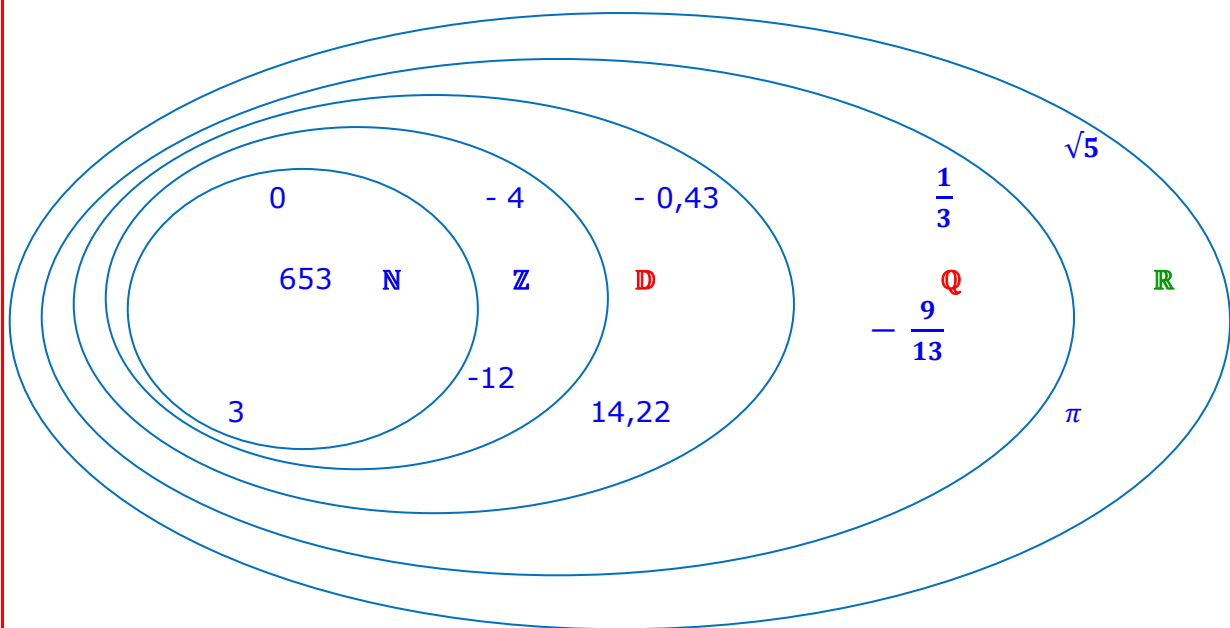


Les ensembles de nombres. Intervalles de $\mathbb{R}$

I) Les différents types de nombres $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$:

1) Définitions et notations

Ensembles de nombres :	Notation :	Définition :	Exemples :
Les nombres entiers naturels	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots\}$ $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul	$0 ; 1 ; 2 ; 3$
Les nombres entiers relatifs	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} = \{\dots ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots\}$ $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	$4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2$
Les nombres décimaux	$\mathbb{D}$	$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 : c'est-à-dire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec le nombre $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{100} ; \frac{7}{5} = \frac{14}{10} ;$ $-3,203 = \frac{3\,203}{1\,000} ;$ $\frac{3}{8} = \frac{37,5}{100} = \frac{375}{1000}$
Les nombres rationnels	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a et b entier relatif non nul.	$\frac{1}{3} ; \frac{7}{5} ; 3 = \frac{3}{1} ;$ $2,5 = \frac{25}{10}$
Les nombres irrationnels		Les nombres qui ne sont pas rationnels s'appellent les nombres irrationnels . Ce sont tous les nombres ayant une infinité de chiffre après la virgule et qui ne peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier relatif non nul. Par exemples $\sqrt{2} ; \sqrt{7} ; \pi$ sont des nombres irrationnels.	$\sqrt{2} ; \pi ; \sqrt{3}$
Les nombres réels	$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels est formé de l'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels. Cet ensemble est noté $\mathbb{R}$.	$\sqrt{2} ; \pi ; \frac{7}{5} ; -3,203 ;$ $-2 ; 3$

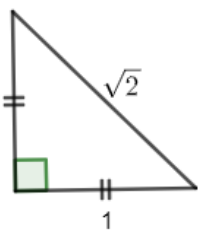


On écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ pour exprimer que chaque ensemble de nombres est **inclus** dans le précédent (c'est à dire que tous les nombres d'un ensemble appartiennent aussi aux ensembles situés à droite dans la relation)

Remarque : $-5 \in \mathbb{Z}$ mais $-5 \notin \mathbb{N}$; $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2) Partie historique

Il existe bien des nombres réels qui ne sont pas rationnels, comme $\sqrt{2}$. Géométriquement, ce nombre représente la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 ou la longueur de la diagonale d'un carré dont la longueur des côtés est 1.



Selon l'historien Diogene Laërce (IIIe siècle), ce sont les Pythagoriciens qui ont découvert l'impossibilité de trouver une solution fractionnaire (cinq siècle avant J.C.). Une valeur approchée de la solution ne convient pas dans le théorème de Pythagore, ils n'arrivaient pas à exprimer la longueur de cette diagonale sous la forme d'une fraction ou d'un nombre entier mais cette découverte devait rester secrète pour ne pas rompre la doctrine de l'école Pythagoricienne : « Tout est nombre », « Nombre » dans ce cas voulant dire sous la forme d'un nombre entier ou d'une fraction.

L'historien et philosophe, Proclus (Ve siècle), déclara à ce sujet « On dit que les gens qui ont divulgué les nombres irrationnels ont péri dans un naufrage jusqu'au dernier, car l'inexprimable, l'informe, doit être absolument tenu secret ; ceux qui l'ont divulgué et ont touché à cette image de la vie ont instantanément péri et doivent rester éternellement ballottés par les vagues. ».

Euclide d'Alexandrie présente une des premières démonstrations de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, nous verrons une des démonstrations en exercice.

3) Exemples

Exemple 1 : La fraction $\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel, elle est le quotient de deux nombres. En exercice nous montrerons que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal de façon rigoureuse.

(On peut aussi faire la division décimale de 1 par 3 on obtient 0,3333..... le nombre de chiffre après la virgule est infinie). Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal mais un nombre rationnel.

$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \text{ et } \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

Exemple 2 : La fraction $\frac{3}{4}$ est un nombre rationnel, il est le quotient de deux nombres.

Si on fait la division décimale de 3 par 4 on obtient 0,75 et $0,75 = \frac{75}{100}$

Donc $\frac{3}{4}$ est aussi un nombre décimal.

$$\frac{3}{4} \in \mathbb{Q} \text{ et } \frac{3}{4} \in \mathbb{D}$$

II) La droite numérique

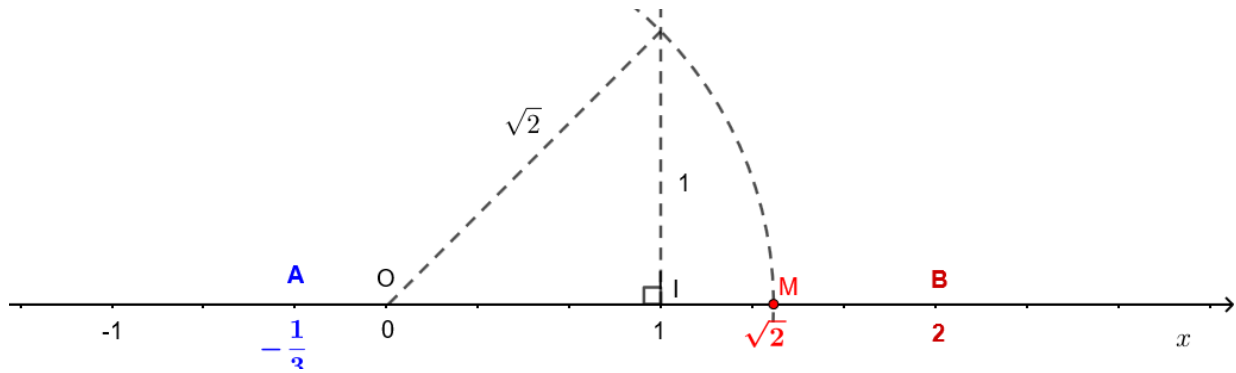
1) Définition :

A tout point M d'une droite graduée lui correspond un unique nombre réel x appelé abscisse du point M dans le repère (O, I).

Réciproquement à tout nombre réel x lui correspond un unique point M de la droite graduée appelée droite numérique.

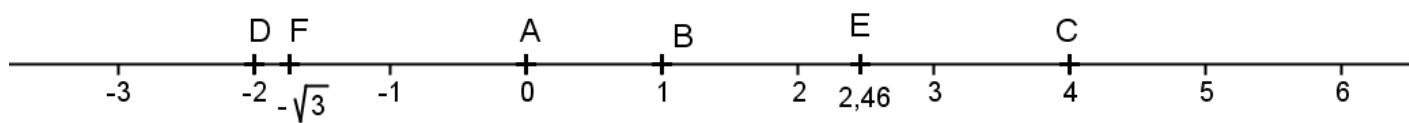
Remarque importante : L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$, il contient tous les nombres connus et étudiés en classe de seconde, cet ensemble est infini et totalement ordonné, ce qui signifie qu'étant donné deux nombres a et b quelconques, on peut toujours écrire $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$. On peut représenter géométriquement l'ensemble des nombres réels par une droite orientée munie d'une origine, correspondant au nombre 0, et une unité de longueur, correspondant au nombre.

Exemple 1 :



Le nombre $\sqrt{2}$ a été placé avec précision sur la droite numérique en reportant au compas la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 1. Son hypoténuse faisant $\sqrt{2}$. L'abscisse du point A est $-\frac{1}{3}$; l'abscisse du point B est 2 ; l'abscisse du point M est $\sqrt{2}$.

Exemple 2 :



Les abscisses des points A, B, C, D, E et F sont respectivement :
 $x_A = 0$; $x_B = 1$; $x_C = 4$; $x_D = -2$; $x_E = 2,46$ et $x_F = -\sqrt{3}$

III) Les intervalles de $\mathbb{R}$

1) Les intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est représenté par un segment, une demi-droite ou par la droite. Chaque intervalle est associé à une inégalité ou un encadrement concernant les abscisses des points de la droite appartenant à ce segment ou cette demi-droite.

Soit A et B deux points de la droite d'abscisses respectives a et b ($a < b$) et soit M un point de la droite d'abscisse x.

On obtient donc les différents intervalles suivants :

2) Tableau récapitulatif des neufs intervalles de $\mathbb{R}$

Les neuf types d'intervalles sont dans le tableau ci-dessous :

M	Nombres x	Représentation graphique	Notation intervalle
$M \in [AB]$	$a \leq x \leq b$		$[a ; b]$
$M \in]AB[$	$a < x < b$		$]a ; b[$
$M \in [AB[$	$a \leq x < b$		$[a ; b[$
$M \in]AB]$	$a < x \leq b$		$]a ; b]$
$M \in [AB)$	$x \geq a$		$[a ; +\infty[$
$M \in]AB)$	$x > a$		$]a ; +\infty [$
$M \in [BA)$	$x \leq b$		$] - \infty ; b]$
$M \in]BA)$	$x < b$		$] - \infty ; b[$
$M \in (d)$	$x \in \mathbb{R}$		$] - \infty ; +\infty [$

Remarques importantes :

- On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités lui appartiennent.
Par exemple : $[6 ; 12]$ est un intervalle fermé.
- On dit qu'un intervalle est **ouvert** si ses extrémités ne lui appartiennent pas
Par exemple : $] -4 ; 7 [$ ou $] -\infty ; 3 [$ sont des intervalles ouverts.
- L'ensemble ne contenant **aucun réel est aussi un intervalle**, c'est l'**intervalle vide**, il se note $\emptyset$
- Le symbole ∞ se lit **infini**.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est aussi un intervalle, il peut se noter $] -\infty ; +\infty [$

3) Intersections d'intervalles

a) Définition

Soit E et F deux ensembles quelconques. On appelle intersection de E et F , et on note $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui sont communs à E et F .

En d'autres termes, x est un élément de $E \cap F$ si et seulement si x est un élément de E ET x est un élément de F .

Remarques : $E \cap F = F \cap E$.

$$E \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$E \cap \mathbb{R} = E.$$

Si I et J sont des intervalles fermés bornés, alors leur intersection est également un intervalle fermé borné.

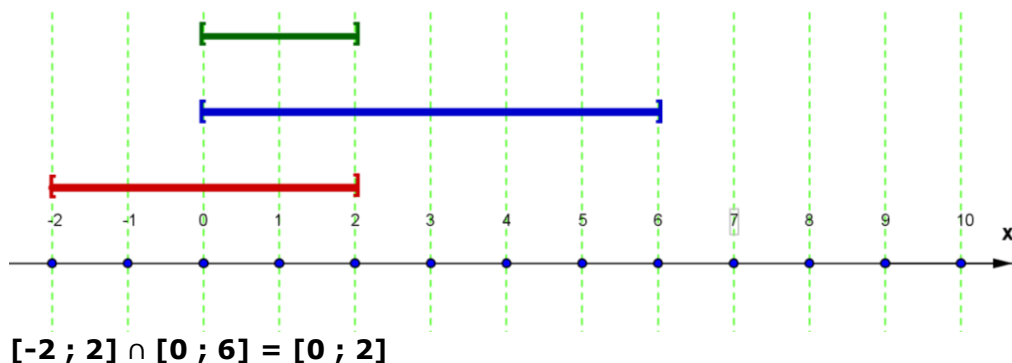
Si I et J sont des intervalles ouverts bornés, alors leur intersection est également un intervalle ouvert borné.

b) Exemples

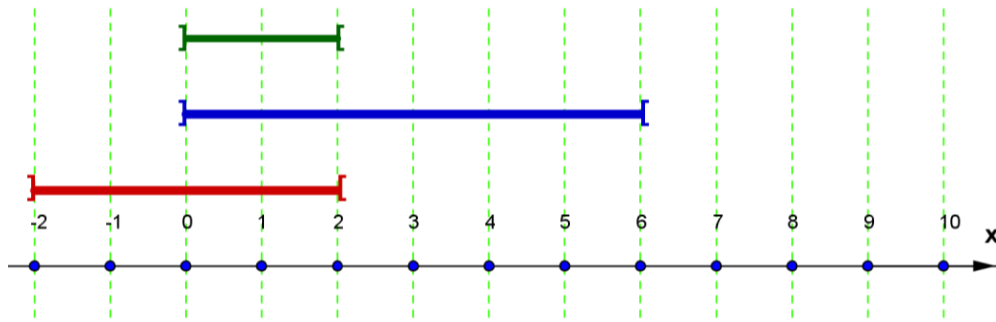
Remarque importante :

Dans tous les exemples, nous avons décalé les intervalles par rapport à l'axe gradué pour des raisons de clarté du dessin, mais en principe, la représentation graphique d'un intervalle reste toujours une partie de l'axe gradué: les intervalles dessinés ci-dessus devraient donc se trouver tous sur l'axe gradué.

Exemple 1. En vert, l'intervalle $[0; 2]$, intersection des intervalles $[-2; 2]$ en rouge et $[0; 6]$ en bleu.

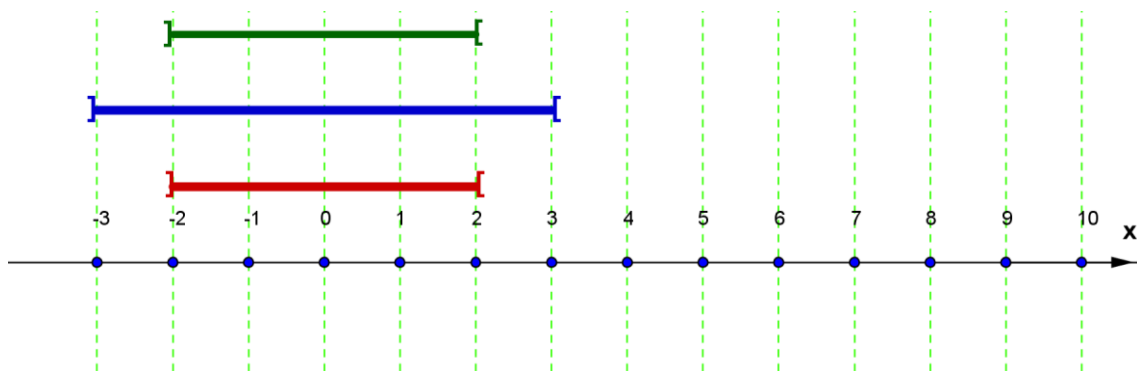


Exemple 2. En vert, l'intervalle $]0; 2[$, intersection des intervalles $] -2; 2[$ en rouge et $]0; 6[$ en bleu.



$$]-2 ; 2[\cap]0 ; 6[=]0 ; 2[$$

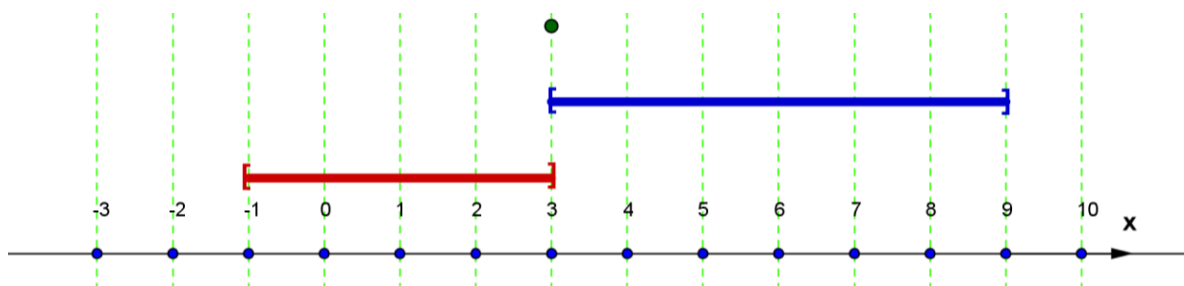
Exemple 3 : Ici, l'intersection est réduite au plus petit des deux intervalles, parce que ce plus petit intervalle est inclus dans le plus grand.



$$]-2 ; 2[\cap] -3 ; 3[=] -2 ; 2[$$

Exemple 4 : L'intervalle dessiné en vert est l'intersection de l'intervalle bleu $[3 ; 9]$ et de $[-1 ; 3]$ en rouge.

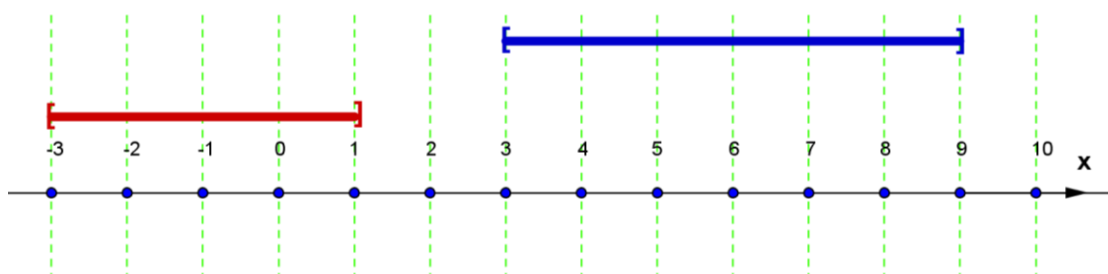
L'intersection des deux intervalles est ici réduite un point.



$$[-1 ; 3] \cap [3 ; 9] = \{3\}$$

Exemple 5 :

Et ici, l'intersection de ces deux intervalles est vide :



$$[-3 ; 1] \cap [3 ; 9] = \emptyset$$

4) Réunions d'intervalles

a) Définition

Soit E et F deux ensembles quelconques. On appelle réunion de E et F , et on note $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui sont soit dans E , soit dans F .

En d'autres termes, x est un élément de $E \cup F$ si et seulement si x est un élément de E **OU** x est un élément de F .

Remarques : $E \cup F = F \cup E$.

$$E \cup \emptyset = E.$$

$$E \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

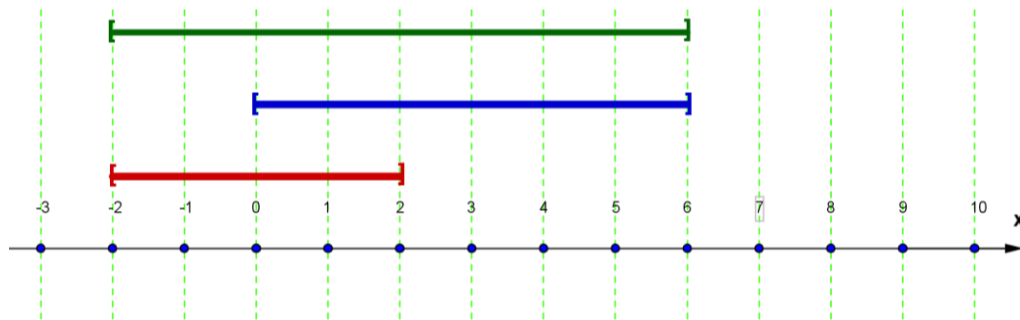
Si I et J sont des intervalles fermés bornés, alors leur réunion n'est pas systématiquement un intervalle. Par contre, la réunion de deux intervalles fermés bornés est fermée et bornée.

b) Exemples

Remarque importante :

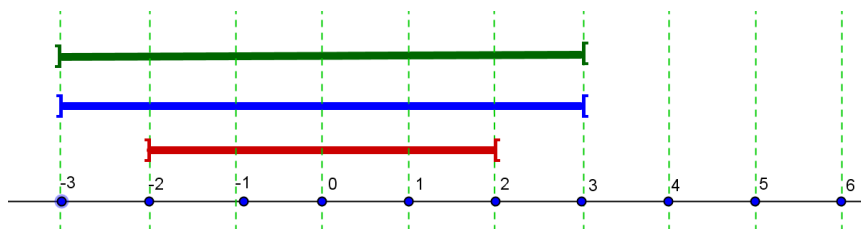
Dans tous les exemples, nous avons décalé les intervalles par rapport à l'axe gradué pour des raisons de clarté du dessin, mais en principe, la représentation graphique d'un intervalle reste toujours une partie de l'axe gradué : les intervalles dessinés ci-dessus devraient donc se trouver tous sur l'axe gradué.

Exemple 1 : En vert, l'intervalle $[-2; 6]$, réunion des intervalles $[-2; 2]$ en rouge et $[0; 6]$ en bleu.



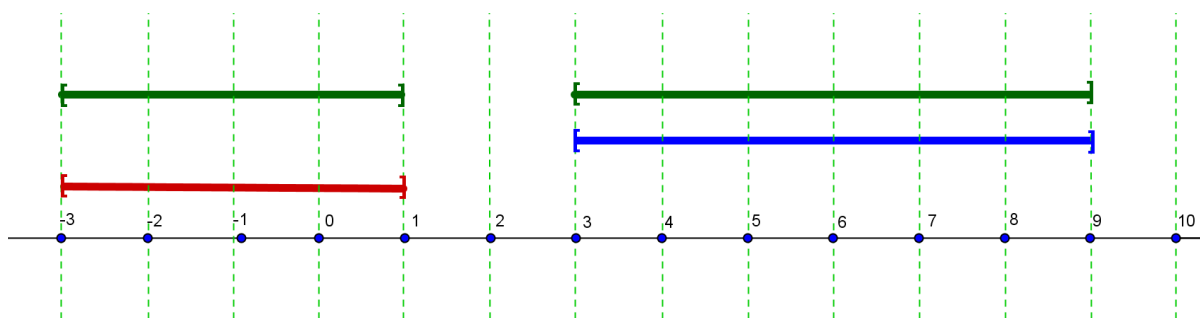
$$[-2; 2] \cup [0; 6] = [-2; 6]$$

Exemple 2 : Ici, la réunion est le plus grand des deux intervalles parce que le plus petit intervalle est inclus dans ce plus grand.



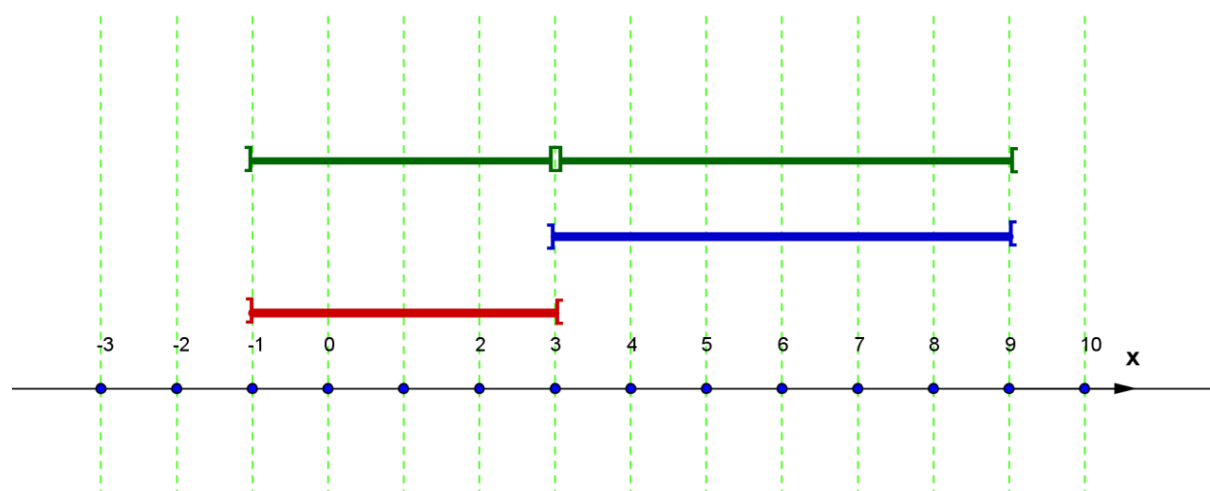
$$]-2; 2[\cup]-3; 3[=]-3; 3[$$

Exemple 3 : Voici un exemple où on ne peut pas écrire la réunion sous la forme d'un intervalle.



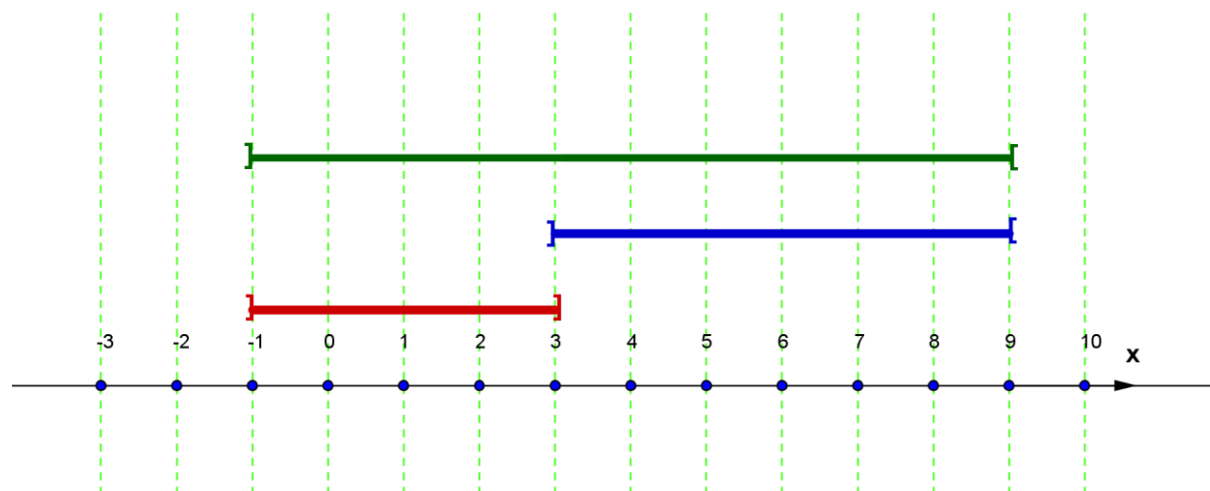
$[-3 ; 1] \cup [3 ; 9]$ ne peut avoir une autre écriture : on ne peut l'écrire sous la forme d'**un** intervalle.

Exemple 4: Voici maintenant la réunion de deux intervalles : attention à l'absence du nombre 3 dans la réunion :



$]-1 ; 3[\cup]3 ; 9[$ Dans ce cas on ne peut pas écrire la réunion sous forme d'un intervalle.

Exemple 5 : Mais si l'une des bornes est fermée en 3, voilà ce que devient la réunion :



$]-1 ; 3] \cup]3 ; 9[=]-1 ; 9[$

Moralité : il faut être attentif (ou attentive) !!!