

Système de deux équations à deux inconnues

I) Système de deux équations à deux inconnues

Définition 1 :

Un système de deux équations à deux inconnues est de la forme :

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres relatifs ,
les deux nombres inconnues sont désignés par les lettres x et y

Exemple :

$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = -1 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues. Les nombres x et y sont les inconnues.

Définition 2 :

a, b, c, a', b', c' sont des nombres relatifs.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
c'est trouver tous les couples de nombres $(x; y)$ qui sont à la fois solutions des deux équations

Exemple 1 :

Le couple $(8 ; -2)$ est il une solution du système d'équations suivant : $\begin{cases} 2x + 5y = 6 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$

Si $x = 8$ et $y = -2$ alors :

$$2 \times 8 + 5 \times (-2) = 16 - 10 = 6$$

donc le couple $(8 ; -2)$ vérifie la **première équation**

$$5 \times 8 - 3 \times (-2) = 40 + 6 = 46 \text{ et } 46 \neq 2$$

donc le couple $(8 ; -2)$ ne vérifie pas la **deuxième équation**

Donc le couple $(8 ; -2)$ n'est pas solution de ce système

Exemple 2 :

Le couple $(9 ; 2)$ est il une solution du système d'équations suivant ? :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$$

si $x = 9$ et $y = 2$ alors :

$$2 \times 9 - 3 \times 2 = 18 - 6 = 12 \text{ donc le couple de nombres } (9 ; 2) \text{ vérifie la première équation}$$

$$9 + 2 \times 2 = 9 + 4 = 13 \text{ donc le couple de nombres } (9 ; 2) \text{ vérifie la deuxième équation}$$

Le couple $(9 ; 2)$ est bien solution de ce système

II) Méthode de résolution

1) Résolution par combinaison

Résoudre par la méthode de combinaison le système $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 6x + 7y = 13 \end{cases}$

• On repère les coefficients devant une des deux inconnues, par exemple ceux de x, et on détermine un de leurs multiples communs non nuls :

12 est un multiple commun de 4 et 6

• On rend égaux les coefficients devant l'inconnue choisie :

(dans notre cas, on rend égaux les coefficients devant x)

Pour avoir 12 comme coefficient devant les termes en x

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 & \text{On multiplie par 3 cette ligne} \\ 6x + 7y = 13 & \text{On multiplie par 2 cette ligne} \end{cases}$$

On obtient : $\begin{cases} 12x + 9y = 6 \\ 12x + 14y = 26 \end{cases}$

• On soustrait les égalités membre à membre et on résout l'équation obtenue :

$$(12x - 12x) + (9y - 14y) = 6 - 26$$

$$0 - 5y = -20$$

$$-5y = -20$$

$$y = -20 \div -5 = 4$$

$$y = 4$$

• On détermine la valeur de l'autre inconnue en remplaçant la valeur trouvée dans une des deux équations :

En remplaçant $y = 4$ dans la première équation obtient :

$$4x + 3 \times 4 = 2 \text{ ce qui donne : } 4x + 12 = 2$$

$$4x = 2 - 12$$

$$4x = -10$$

$$\text{Soit } x = -\frac{10}{4}$$

$$x = -2,5$$

Le couple $(-2,5 ; 4)$ est solution du système

• On vérifie si le couple trouvé est une solution du système de départ

$$4 \times (-2,5) + 3 \times 4 = -10 + 12 = 2 \text{ et}$$

$$6 \times (-2,5) + 7 \times 4 = -15 + 28 = 13$$

• Conclusion :

Le système possède une unique solution le couple de nombres : $(-2,5 ; 4)$

2) Résolution par substitution du système

Résoudre par la méthode de substitution le système : $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

• On exprime une des inconnues en fonction de l'autre

On choisit l'équation et l'inconnue afin d'avoir les calculs les plus simples.

Dans ce système, le plus simple est d'exprimer y **en fonction de x** de la première équation : $3x + y = 1$ et on obtient :

$$y = 1 - 3x$$

• On remplace cette inconnue par sa nouvelle expression dans l'autre équation:

On remplace y par l'expression $1 - 3x$ dans la deuxième équation :

$$2x + 3(1 - 3x) = -4$$

$$2x + 3 - 9x = -4$$

$$-7x + 3 = -4$$

$$-7x = -4 - 3 = -7$$

$$-7x = -7$$

$$x = \frac{-7}{-7} = 1 \text{ donc}$$

$$x = 1$$

• On détermine la valeur de l'autre inconnue

On sait que $y = 1 - 3x$. Il suffit de remplacer x par 1 dans cette expression

On obtient : $y = 1 - 3 = -2$

$$y = -2$$

• On vérifie si le couple trouvé est bien solution du système

$$3 \times 1 + (-2) = 3 - 2 = 1 \text{ et}$$

$$2 \times 1 + 3 \times (-2) = 2 - 6 = -4$$

• Conclusion :

Le couple $(1 ; -2)$ est solution de ce système

III) Méthode graphique :

Soit le système : $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

a) On exprime y en fonction de x dans les deux équations

on obtient un nouveau système qui a les mêmes solutions que le système de départ :

$6x - 3y = 9$ On a donc : $-3y = 9 - 6x$ soit $y = \frac{-6}{-3}x + \frac{9}{-3}$ on obtient donc : $y = 2x - 3$

$2x + y = 5$ On a donc $y = -2x + 5$. On obtient le système :

$$\begin{cases} y = 2x - 3 & (1) \\ y = -2x + 5 & (2) \end{cases}$$

b) Dans un repère, on représente graphiquement les fonctions affines associées au système

- La représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto 2x - 3$ est une droite d'équation $y = 2x - 3$ (qui est l'équation (1) du système). On notera cette droite (d1)

Si $x = 1$ alors $y = 2 - 3 = -1$ et si $x = 0$ alors $y = -3$

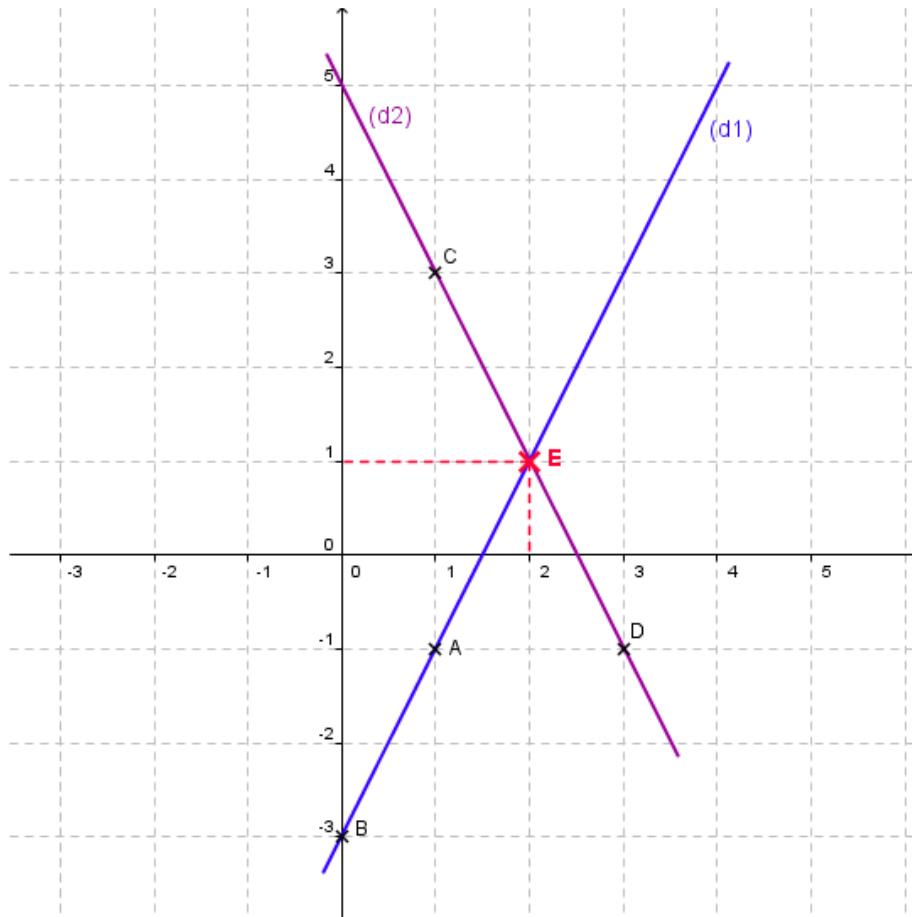
La droite (d1) passe par les points **A (1 ; -1)** et **B (0 ; -3)**

- La représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto -2x + 5$ est une droite d'équation $y = -2x + 5$ (qui est l'équation (2) du système). On notera cette droite (d2)

Si $x = 1$ alors $y = -2 + 5 = 3$ et si $x = 3$ alors $y = -2 \times 3 + 5 = -6 + 5 = -1$

La droite (d2) passe par les points **C (1 ; 3)** et **B (3 ; -1)**

On trace, dans un repère, les deux droites :



c) On lit les coordonnées du point d'intersection des droites (d1) et (d2)

Les coordonnées du point d'intersection E des deux droites sont : (2 ; 1)

Le couple (2 ; 1) est solution de ce système

d) On vérifie si le couple trouvé est bien solution du système

$$6 \times 2 - 3 \times 1 = 12 - 3 = 9 \text{ et}$$

$$2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

Le couple (2 ; 1) est bien solution du système : $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Remarque :

Une lecture graphique conduit souvent à une solution approchée du système (coordonnées non entière, imprécision des tracés etc..).

Il faut donc toujours vérifier les résultats de la lecture graphique par le calcul.